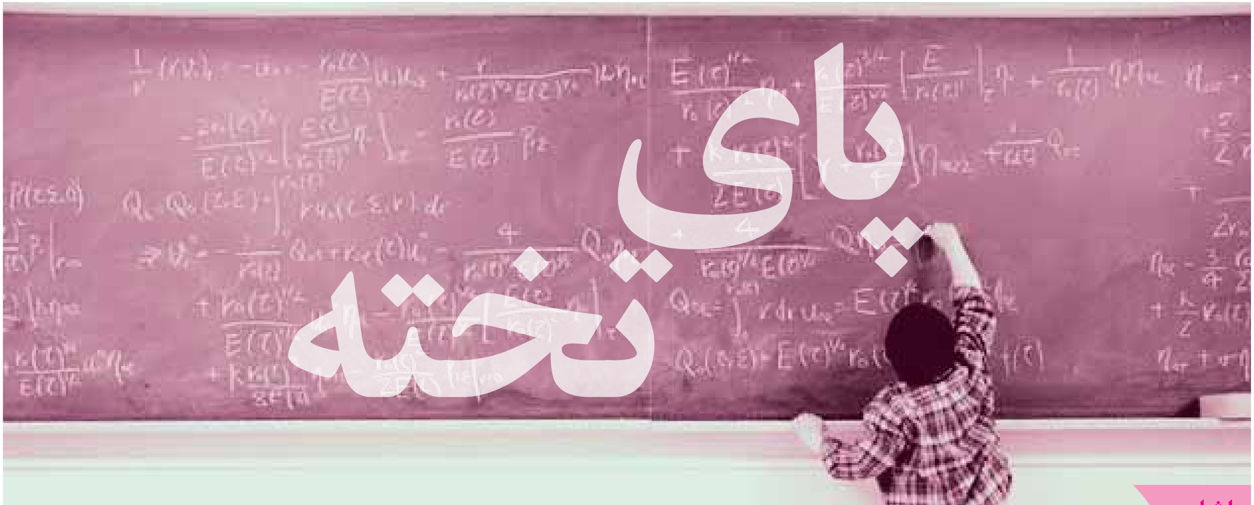
دکتر محرم نژاد ایردموسی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۳۱. بدون استفاده از ماشین حساب عدد ۱۵۹۹۹۹ را به عامل‌های اول تجزیه کنید.

۱۳۲. همهٔ مقادیر صحیح n را بیابید، به‌طوری که حاصل $\frac{n^3+8}{n^2-4}$ مقداری صحیح داشته باشد.

۱۳۳. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a+b$، a^2+b و $a+b^2$ گویا باشند و $a+b\neq 1$، آن‌گاه ثابت کنید a و b گویا هستند.

۱۳۴. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر a^2+b^2، a^3+b^3 و a^4+b^4 گویا باشند، ثابت کنید $a+b$ و ab گویا هستند.

۱۳۵. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $[2a]+[2b]\geq[a]+[b]+[a+b]$ (جزء صحیح x = $[x]$).

۱۳۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویاست.

۱۳۷. x، y و z سه عدد حقیقی مختلف هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0$$

۱۳۸. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که در تساوی $x^3+y^3+3xy=1$ صدق می‌کنند.

۱۳۹. برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

۱۴۰. به ازای هر عدد صحیح n، نشان دهید n^4-22n^2+9 مرکب است.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۷۱. شعاع کوچک‌ترین کره‌ای را بیابید که ۴ کره به شعاع ۱ در آن محاط شوند.

اگر مراکز چهار کره به شعاع ۱ به‌هم وصل کنیم، یک چهاروجهی منتظم با ضلع ۲ سانتی‌متر خواهیم داشت.

شعاع دایرهٔ محیطی این چهاروجهی منتظم را محاسبه و با یک جمع می‌کنیم تا شعاع دایرهٔ خواسته شده به‌دست آید.

۷۲. با فرض $|x|<1$، مطلوب است حاصل عبارت: $S=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)...$.

$$S=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...$$
$$=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times...=\frac{1}{1-x}$$

۷۳. بزرگ‌ترین مقدار K را بیابید، به‌طوری که !۱۰۰ بر 24^K بخش‌پذیر باشد.

$24^K=2^{3K}\times3^K$. از طرفی !۱۰۰ در تجزیه به عامل‌های اول بر $2^{97}\times3^{48}$ بخش‌پذیر است. در نتیجه باید $K\leq48$ و $3K\leq97$ و بیشترین مقدار K برابر است با ۳۲.

۷۴. عدد ۶ رقمی N حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی زوج و متوالی است و می‌دانیم دو رقم اول و آخر آن برابر است با ۲. N را پیدا کنید.

$$200002\leq 2K(2K-2)(2K+2)\leq 299992$$
$$\Leftrightarrow 200002\leq 8(K^3-K)\leq 299992$$
$$\Leftrightarrow 25001\leq K^3-K\leq 37499$$
$$\Rightarrow 30\leq K\leq 33\Rightarrow N=8(33^3-33)=287232$$

نتیجه‌گیری آخر با امتحان کردن چهار مقدار K به‌دست می‌آید.

۷۵. دایره‌ای به شعاع ۳ از مرکز مربعی به ضلع ۲ می‌گذرد. مطلوب است تفاضل مساحت دو ناحیهٔ S_1 و S_2 به‌طوری که S_1 قسمتی از دایره است که با مربع پوشیده نشده است و S_2 قسمتی از مربع است که با دایره پوشیده نشده است.

اگر مساحت ناحیهٔ مشترک دایره و مربع را S بنامیم، آن‌گاه: $S_1-S_2=(S_1+S)-(S+S_2)=9\pi-4$

۷۶. حاصل کسر نامتناهی زیر را به‌دست آورید (این کسر را کسر مسلسل می‌نامند).

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+...}}}}$$

با توجه به مقدار A داریم:

$$A=1+\frac{1}{1+\frac{2}{A}}=1+\frac{A}{A+2}$$

در نتیجه: $A^2+2A=2A+2$ و یا: $A^2=2$. بنابراین: $A=\sqrt{2}$.

۷۷. مطلوب است بزرگ‌ترین عدد طبیعی N به‌طوری که m^5-5m^3+4m به ازای هر $m\geq5$، بر N بخش‌پذیر باشد.

داریم: $m^5-5m^3+4m=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$.
پس این عبارت حاصل‌ضرب پنج عدد متوالی است.

از طرف دیگر، سمت راست عبارت فوق برابر است با: $5!\binom{m+2}{5}$. در نتیجه این عبارت بر !۵ یا ۱۲۰ بخش‌پذیر است. همچنین، N عامل اولی بزرگ‌تر از ۵ ندارد، چون می‌توان پنج عدد متوالی یافت که حاصل‌ضرب آن‌ها بر عدد اول مفروضی بزرگ‌تر از ۵ بخش‌پذیر نباشد. به‌علاوه، توان ۲ در N نمی‌تواند بیشتر از ۳ باشد. چون اگر m فرد باشد، تنها $m-1$ و $m+1$ زوج هستند و حاصل‌ضرب این پنج عدد متوالی مضرب ۸ است و مضرب ۱۶ نیست. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد توان ۳ و ۵ در N بیشتر از یک نیست. در نتیجه بیشترین مقدار N برابر ۱۲۰ است.

۷۸. معادلهٔ $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ را حل کنید.

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{(x-\frac{1}{x})-(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$$

در نتیجه با جمع این معادله با معادله اولیه خواهیم داشت:

$$2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+x\Rightarrow x-\frac{1}{x}+1-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0$$
$$\Rightarrow(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1)^2=0\Rightarrow\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1\Rightarrow x-\frac{1}{x}=1$$
$$\Rightarrow x^2-1=x\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

پاسخ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ غیرقابل قبول است (چرا؟)

۷۹. دنبالهٔ $\{a_i\}$ به‌صورت $a_i=2a_{i-1}+k$ تعریف شده است، به‌طوری که $a_2=5$ و $a_8=257$. جملهٔ پنجم دنباله را به‌دست آورید.

$$a_n+k=2(a_{n-1}+k)\Rightarrow a_n+k=2^{n-2}(a_2+k)$$
$$\Rightarrow a_n=5\times2^{n-2}+k(2^{n-2}-1)$$

اما: $a_8=257$. پس: $257=a_8=5\times64+63k$ که نتیجه می‌دهد: $k=-1$. یعنی: $a_n=2^n+1$. پس: $a_5=33$.

۸۰. کم‌ترین مقدار طبیعی x را بیابید، به‌طوری که x^2+x+41 اول نباشد.

کمترین مقدار طبیعی x با فرض مرکب بودن x^2+x+41 برابر است با: ۴۰. چون: $41^2=41+40+40^2$. از طرف دیگر، حاصل عبارت فوق به ازای همهٔ مقادیر ۰ تا ۳۹ اول است! این محاسبات اولین‌بار توسط اویلر در سال ۱۷۷۲ انجام شده است.

۸۱. در یک نه‌ضلعی منتظم، همهٔ قطرها را رسم کرده‌ایم. چند مثلث متساوی‌الساقین در شکل حاصل وجود دارد که سه رأس هر یک، سه رأس از نه‌ضلعی مذکور است.

برای شمارش مثلث‌های متساوی‌الساقین، ابتدا رأس مشترک دو ساق را انتخاب می‌کنیم که برای این کار ۹ انتخاب وجود دارد. سپس دو رأس پای ساق‌ها را انتخاب می‌کنیم که برای این‌کار ۴ انتخاب وجود دارد. در نتیجه 9×4 مثلث متساوی‌الساقین شمرده می‌شود. اما مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را سه بار شمرده‌ایم. در نتیجه جواب صحیح $36-3\times2=30$ خواهد بود.

۸۲. اشکان در کشوی کمد خود ۱۰ لنگه جوراب آبی و تعدادی لنگه جوراب سفید دارد. اگر او بدون نگاه کردن به جوراب‌ها بخواهد تعدادی لنگه جوراب از کشو خارج کند، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب آبی در میان آن‌ها باشد، باید حداقل m لنگه جوراب از کشو خارج کند و در صورتی که بخواهد بدون نگاه کردن تعدادی لنگه جوراب بردارد، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب سفید در میان آن‌ها باشد، باید حداقل n لنگه جوراب از کشو خارج کند. می‌دانیم $m=2n$. چند لنگه جوراب سفید در کشو وجود دارد؟

فرض کنید تعداد لنگه جوراب‌های سفید k باشد. برای داشتن یک جفت جوراب آبی باید $m=k+2$ لنگه و برای داشتن یک جفت جوراب سفید، باید $n=12$ لنگه از کشو برداریم. چون $m=2n$، پس: $k+2=2\times12$. در نتیجه: $k=22$.

۸۳. نقطهٔ E روی ضلع CD از مربع ABCD واقع است. پاره‌خط AE توسط نقاط P، R و T به چهار قسمت مساوی و پاره‌خط EB نیز توسط نقاط Q، S و U به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر طول پاره‌خط PQ برابر ۳ باشد، مساحت چهارضلعی PQUT را به‌دست آورید.

با نوشتن رابطهٔ **تالس** در مثلث AEB خواهیم داشت: $\frac{3}{4}=\frac{PQ}{AB}$. در نتیجه: $AB=4$. همچنین: $\frac{1}{4}=\frac{TU}{AB}$ که نتیجه می‌دهد: $TU=1$. مجدداً اگر از E عمودی بر AB رسم کنیم، ارتفاع چهارضلعی TUQP برابر ۲ به‌دست خواهد آمد. در نتیجه مساحت PQUT برابر است با: $\frac{1+3}{2}\times2=4$.

۸۴. افسانه ۶ کارت دارد که روی هر کدام از آن‌ها یک عدد طبیعی نوشته شده است. او هربار سه کارت را انتخاب می‌کند و سه عدد روی آن سه کارت را با هم جمع می‌کند. بیست عدد حاصل می‌شود که ده‌تای آن‌ها برابر ۱۶ و ده‌تای دیگر برابر ۱۸ هستند. کوچک‌ترین عددی که روی کارت‌ها نوشته شده است چه عددی است؟

فرض کنید شش عدد روی کارت‌ها $a\le b\le c\le d\le e\le f$ باشند. در نتیجه: $a+b+c=16$ و $d+e+f=18$. از این دو نتیجه می‌شود که: $c\ge6$ و $d\le6$. پس: $c=d=6$. از $d=6$ نتیجه می‌شود: $e+f=12$ و چون: $6\le e$، پس: $e=f=6$. از $c=6$ نتیجه می‌شود: $a+b=10$. دو حالت برای b وجود دارد یا $b=6$ و $a=4$ که در شرایط مسئله صدق می‌کنند و یا $a=b=5$ که در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند. پس شش عدد روی کارت‌ها عبارت‌اند از: ۶، ۶، ۶، ۶، ۶ و ۴.

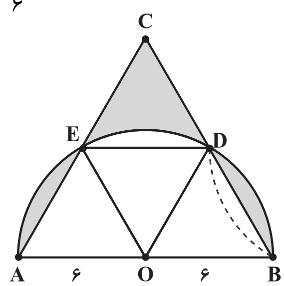
۸۵. اگر تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل‌ضرب رقم‌های هر یک برابر ۲۵ است، برابر a و تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل‌ضرب رقم‌های هر یک برابر ۱۵ است، برابر b باشد، $\frac{a}{b}$ را بیابید.

برای اینکه حاصل‌ضرب پنج رقم برابر ۲۵ باشد، تنها حالت ممکن این است که رقم‌ها برابر ۱، ۱، ۱، ۵ و ۵ باشند که در این صورت $\binom{5}{2}=10$ عدد با این ارقام وجود دارند. پس: $a=10$. اما اگر حاصل‌ضرب ارقام ۱۵ باشد، تنها حالت ممکن برای رقم‌ها این است که رقم‌ها برابر ۱، ۱، ۱، ۳ و ۵ باشند و تعداد اعداد پنج‌رقمی با این ارقام برابر $b=20=5\times4$ خواهد بود. در نتیجه: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

۸۶. نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم کنید. همچنین، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری رسم کنید که نیم‌دایره را در دو نقطهٔ دیگر به‌جز A و B قطع کند. یک ناحیهٔ مشترک و سه ناحیهٔ غیرمشترک ایجاد می‌شوند. مجموع مساحت سه

ناحیهٔ غیرمشترک را بیابید، اگر بدانیم: AB=۱۲.

اگر مساحت ناحیهٔ غیرمشترک خارج نیم‌دایره برابر $S_۱$ و مساحت دو ناحیهٔ دیگر را $S_۲$ بنامیم، به‌راحتی از شکل معلوم می‌شود که: $S_۱+۲S_۲$ برابر مساحت قطاع OBD خواهد بود که برابر است با: $\frac{۱}{۶}\pi\times۶^۲=۶\pi$.



۸۷. مستطیلی با ابعاد صحیح به مربعات واحد افراز شده است. می‌دانیم تعداد مربعات واحدی که مجاور با ضلع‌های مستطیل هستند، با تعداد بقیهٔ مربعات برابر است. این مستطیل چند در چند است؟

اگر m و n طول و عرض مستطیل باشند، آن‌گاه طبق فرض مسئله داریم: $mn=۲((m-۲)(n-۲))$، که پس از ساده کردن به تساوی $(m-۴)(n-۴)=۸$ تبدیل می‌شود. در نتیجه: $n-۴=۸$ و $m-۴=۱$ یا: $n-۴=۴$ و $m-۴=۲$. پس مستطیل ۱۲×۵ یا ۸×۶ خواهد بود.

۸۸. عمل $\odot$ روی اعداد مثبت طوری تعریف شده است که داشته باشیم:

$$(۱)\ (۲x)\odot y=\frac{۱}{۲}+(x\odot y)$$

$$(۲)\ y^۲\odot x=x^۲\odot y$$

$$(۳)\ ۲\odot۲=\frac{۳}{۲}$$

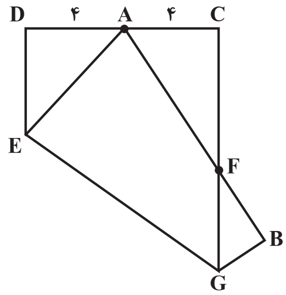
مقدار ۳۲⊙۸ را بیابید.

$$۳۲\odot۸=۱۶\odot۸+\frac{۱}{۲}=۸\odot۸+۱=۴\odot۸+\frac{۳}{۲}$$

$$=۸^۲\odot۲+\frac{۳}{۲}=۳۲\odot۲+۲=۱۶\odot۲+\frac{۵}{۲}$$

$$=۸\odot۲+۳=۴\odot۲+\frac{۷}{۲}=۲\odot۲+۴=۵/۵$$

۸۹. کاغذی مربع شکل به ضلع ۸ سانتی‌متر داریم. اگر کاغذ را تا کنیم و رأس A را روی نقطهٔ وسط پاره‌خط DC قرار دهیم، مثلث کوچکی در رأس B ایجاد می‌شود (شکل). مساحت این مثلث را بیابید.



داریم: $AE+ED=۸$ و $۴^۲+DE^۲=AE^۲$. با حل این دو رابطه در یک دستگاه، مقادیر $DE=۳$ و $AE=۵$ حاصل می‌شوند. چون مثلث‌های ADE، ACF و GFB متشابه هستند، با نوشتن روابط تشابه مقادیر $CF=\frac{۱۶}{۳}$ و $AF=\frac{۲۰}{۳}$ به‌دست می‌آیند. در نتیجه: $FB=\frac{۴}{۳}$. مجدداً با نوشتن روابط متشابه داریم: $\frac{۴}{FB}=\frac{۳}{BG}$. در نتیجه: $BG=۱$ و مساحت مثلث FGB برابر $\frac{۲}{۳}$ به‌دست می‌آید.

۹۰. کارتی با شمارهٔ ۱۲ به تو می‌دهم. با رعایت ۲ قاعدهٔ زیر می‌توانی کارت‌های دیگری نیز داشته باشی:

۱. اگر کارتی با شمارهٔ a داشتی، می‌توانی کارتی با شمارهٔ ۲a+۱ نیز داشته باشی.

۲. اگر کارتی با شمارهٔ b داشته باشی که a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه مجاز هستی کارتی با شمارهٔ $\frac{b}{۳}$ هم داشته باشی.

الف. ثابت کن می‌توانی کارتی با شمارهٔ ۲۹ داشته باشی.

ب. ثابت کن می‌توانی کارتی با شمارهٔ $۲^{۲۰۱۲}-۱$ داشته باشی.

ج. ثابت کن نمی‌توانی کارتی با شمارهٔ ۱۰۰ داشته باشی.

الف) دنبالهٔ ۱۲، ۴، ۹، ۳، ۷، ۱۵، ۳۱، ۶۳، ۲۱، ۴۳، ۸۷ و ۲۹ را در نظر بگیرید.

ب) دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$۱۲,۴,۹,۳,۷=۲^۳-۱,۱۵=۲^۴-۱,\ ۳۱=۲^۵-۱,\ ۶۳=۲^۶-۱,\ ...,\ ۲^{۲۰۱۲}-۱$

ج) در استفاده از قاعدهٔ ۱، حاصل همیشه عددی فرد است. از طرف دیگر، قاعدهٔ ۲ نیز عامل ۲ را از بین نمی‌برد. در نتیجه تنها در صورتی می‌توانیم به عدد ۱۰۰ برسیم که عدد ابتدایی مضرب ۴ باشد که این‌طور نیست.